Partie B

$(C') : y = e^x$ $\Delta' : y = x$

1) $g(x) = e^x$ $g'(x) = e^x$

$(Cg) = (C')$

$T : y = e^t.(x - t) + e^t$

Pour $x = 0 \longrightarrow y = (1 - t)\,e^t$

d'ou $N_t\,(0, (1 - t)\,e^t)$

2) $P_t\,(t, t)$ $M_t\,(t, e^t)$

a) $M_{-2}\,(-2, e^{-2})$

$P_{-2}\,(-2, -2)$

$N_{-2}\,(0, 3e^{-2})$

$O\,(0, 0)$

$\overrightarrow{G_{-2}O} + \overrightarrow{G_{-2}M_{-2}} + \overrightarrow{G_{-2}P_{-2}} + \overrightarrow{G_{-2}N_{-2}} = \vec{0}$

$$x_{G-2} = \frac{0 + (-2) + (-2) + 0}{4} = -1$$

$$y_{G-2} = \frac{0 + e^{-2} - 2 + 3.e^{-2}}{4} = e^{-2} - \frac{1}{2}$$

b)

$$x_{Gt} = \frac{x_0 + x_{Mt} + x_{Pt} + x_{Nt}}{4}$$

$$x_{Gt} = \frac{t}{2}$$

$$y_{Gt} = \frac{y_0 + y_{Mt} + y_{Pt} + y_{Nt}}{4}$$

$$y_{Gt} = \frac{t + e^t + (1-t)e^t}{4} = \frac{t + (2-t)e^t}{4}$$

$$G_t = \left(\frac{t}{2}, \frac{t + (2-t)e^t}{4}\right) \Rightarrow Gt\left(\frac{t}{2}, f\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$

L'ensemble des points G_t lorsque t varie dans IR est la courbe (C) de f.

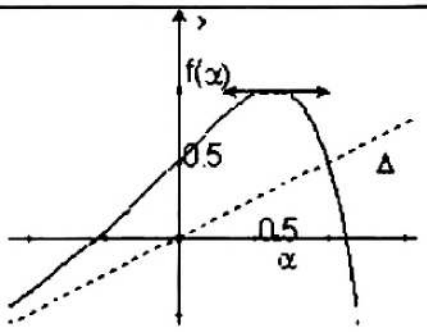
Partie C

1)

$\Delta : y = \frac{1}{2}x$ asymptote à (C) au voisin $(-\infty)$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2} + \left(\frac{1-x}{2x}\right) e^{2x} = -\infty$$

B.I.parabolique de direction celle de $(O, \vec{j})$ au voisinage $(+\infty)$



2) (y=0 mal définie à éliminé)

$$A = \int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{2}x\right)dx$$

$$A = \int_0^1 \left(\frac{1-x}{2}\right) e^{2x} \, . \, dx$$

$$\begin{cases} U'(x) = e^{2x} \longrightarrow U(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \\ V(x) = \frac{1-x}{2} \longrightarrow V'(x) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$A = \left[\left(\frac{1-x}{4}\right) e^{2x} \right]_0^1 + \frac{1}{4} \int_0^1 e^{2x}.dx$$

$$A = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} e^{2x}\right]_0^1$$

$$A = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$A = \frac{e^2 - 3}{8} \text{ U.a}$$

$$A = 4\left(\frac{e^2 - 3}{8}\right) cm^2 = \frac{e^2 - 3}{2} cm^2$$

EX41 $\begin{cases} f(x) = (x + 1)\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) a) pour $x \in\ ]0, +\infty[$ on a :

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}(x + 1)\ e^{-\frac{1}{x}}$$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2}\right) e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{x}} Q(x)$$

avec $Q(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2}$